Propaganda em um duopólio de Cournot com produtos diferenciados e demandas lineares

Advertising in a Cournot duopoly with product differentiation and linear demands

DOI: https://dx.doi.org/10.26694/2764-1392.8460

Júlia Teixeira Oliveira[1]
João Plínio Juchem Neto[2]
Jorge Paulo de Araújo[3]

Resumo: A principal contribuição deste artigo é adicionar gastos com propaganda em um duopólio de Cournot simétrico com produtos diferenciados, funções de demanda e funções de custo lineares, tomando por base o modelo teórico proposto por Dixit (1979). Metodologicamente este trabalho segue uma abordagem de modelagem matemática usualmente utilizada nas áreas de Microeconomia e Organização Industrial, tendo como objetivo analisar o impacto da propaganda nas quantidades, preços e lucros de equilíbrio de duopólio. Os resultados demonstram que o gasto em propaganda terá um impacto positivo nas variáveis de equilíbrio apenas se as firmas forem eficientes o suficiente, ou se o preço máximo que os consumidores estão dispostos a pagar pelos produtos for grande o suficiente em mercados com menor diferenciação de produtos. Além disso, também se mostrou que quanto maior for a eficiência das firmas, ou o preço máximo que os consumidores estão dispostos a pagar pelo produto, maior é a faixa de diferenciação de produtos na qual o impacto da propaganda é positivo, abrangendo todos os graus de diferenciação no limite em que a eficiência tende ao infinito.
Palavras-chave: Propaganda Persuasiva. Organização Industrial. Microeconomia. Duopólio de Cournot. Diferenciação de Produtos.

Abstract: The main contribution of this paper is to add advertising spending in a symmetric Cournot duopoly with differentiated products, linear demand functions, and linear cost functions, building on the theoretical model proposed by Dixit (1979). Methodologically, this work follows a mathematical modeling approach commonly used in the areas of Microeconomics and Industrial Organization, with the objective of analyzing the impact of advertising on the equilibrium quantities, prices, and profits in the duopoly. The results demonstrate that advertising spending has a positive impact on the equilibrium variables only if firms are sufficiently efficient, or if the maximum price consumers are willing to pay for the products is sufficiently high in markets with less product differentiation. In addition, it is also shown that the greater the efficiency of firms, or the higher the maximum price consumers are willing to pay for the products, the larger the range of product differentiation over which the impact of advertising is positive, encompassing all degrees of differentiation in the limit as efficiency tends to infinity.
Keywords: Persuasive Advertising. Industrial Organization. Microeconomics. Cournot Duopoly. Product Differentiation.

Artigo submetido em 30 de março de 2026. Aceito em 24 de maio de 2026.

[1] Bacharela em Ciências Econômicas pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). ORCID: https://orcid.org/0009-0007-6896-6804; *e-mail*: juliateixeira1105@gmail.com

[2] Doutor em Matemática Aplicada pela UFRGS. Docente no Departamento de Economia e Relações Internacionais e no Programa de Pós Graduação em Economia da UFRGS. Lattes: http://lattes.cnpq.br/4722086991853309; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7640-6539; *e-mail*: plinio.juchem@ufrgs.br

[3] Doutor em Economia pela UFRGS. Professor no Departamento de Economia e Relações Internacionais da UFRGS. Lattes: http://lattes.cnpq.br/5298572214493797; ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3803-2377; *e-mail*: 00006283@ufrgs.br

Introdução

Entender como mercados e indústrias funcionam é o que visam os estudos da área da Economia denominada de Organização Industrial, cuja ênfase está na maneira pela qual ocorre a competição entre firmas em diferentes estruturas de mercado. Dentre elas, está a concorrência imperfeita, em que se verifica, geralmente, um número pequeno de empresas rivais disputando consumidores (Shy, 1995). Assim, como esses últimos contam com diversas ofertas à sua disposição para escolher, nenhuma firma tem assegurada a demanda pelo seu produto, sendo dependente das decisões não apenas de produção como também de preços tomadas pelas concorrentes. Sob essa ótica, as firmas precisam agir no sentido de que tal concorrência seja suavizada, para tanto, duas frentes de ação possíveis são a diferenciação de seus produtos e/ou o uso de publicidade para conquistar mais clientes (Lauga; Ofek; Katona, 2022).

Tendo em vista a diferenciação de produtos, esta desvia-se da teoria do consumidor da microeconomia usual, a qual parte da premissa de bens homogêneos. Ainda que existam mercados em que essa suposição seja válida, em estruturas oligopolistas – caracterizadas por concorrência imperfeita – é comum a produção de bens diferenciados pelas firmas atuantes (Belleflamme; Peitz, 2010; Nicholson; Snyder, 2012; Shy, 1995). O modelo de Dixit (1979) é frequentemente utilizado para analisar tal configuração de mercado, o qual sugere um equilíbrio parcial a partir de demandas inversas lineares – derivadas de uma função de utilidade quadrática sem efeito renda –, com efeitos de preço cruzado entre os produtos. Valendo-se dessa estrutura, Singh e Vives (1984) exploraram como a decisão estratégica entre competir via quantidades (Cournot) e via preços (Bertrand) é afetada pelo grau de diferenciação, dependendo crucialmente da natureza dos bens. Considerando uma competição de Cournot, e sendo os custos de produção das duas empresas iguais a zero, esse modelo implica que, à medida que a diferenciação de produtos se eleva, os lucros aumentam ou, em outras palavras, um maior poder de monopólio é conferido às firmas pela diferenciação (Shy, 1995).

Por outro lado, a propaganda ocupa uma posição central na dinâmica dos mercados, alcançando os consumidores por meio de diversos canais de comunicação. Diante disso, não surpreende que os gastos com anúncios atinjam cifras bastante elevadas (Bagwell, 2007). Sob essa perspectiva, Johnson e Lee (2024) mostram que, somente em 2023, a Amazon registrou um gasto em torno de US$ 20,3 bilhões com anúncios e promoções, enquanto a L'Oréal e a P&G destinaram, respectivamente, cerca de US$ 14,5 bilhões e US$ 12,7 bilhões ao mercado publicitário. Essas ações evidenciam que a disputa pela atenção do consumidor exige orçamentos bastante expressivos.

A literatura econômica distingue a publicidade em dois tipos: a informativa e a persuasiva; enquanto a primeira visa fornecer dados essenciais sobre o produto, como seu preço e onde comprá-lo, a segunda se encarrega de moldar e intensificar as preferências dos consumidores por um produto específico (Shy, 1995). Desta forma, este estudo considerará a publicidade persuasiva, visto que o objetivo central dela, conforme Shy (1995), é alterar a preferência do consumidor, fazendo com que o bem anunciado pela empresa pareça mais interessante frente às demais opções.

Do ponto de vista teórico, ao introduzir propaganda em um modelo de monopólio, foi seminal o trabalho de Dorfman e Steiner (1954), do qual um caso particular, considerando uma função de demanda não linear com elasticidades preço e propaganda constantes, foi proposto por Shy (1995). Baseado nesse último trabalho, Kremer (2025) mostra que o gasto em propaganda só tem impacto positivo na quantidade e lucro de equilíbrio de um monopolista – bem como em um duopólio de Cournot com produtos homogêneos – se a demanda pelo bem é grande (ou intensa) o suficiente. Em outras palavras, se a demanda é pequena, o impacto da propaganda é negativo. Além disso, esse estudo também mostra que o preço do bem não é afetado pela propaganda, o que ocorre devido à natureza da função de demanda utilizada.

Recentemente, Fujisawa (2024) analisa a interação entre propaganda e diferenciação de produtos em um modelo de duopólio, focando na escolha estratégica das firmas entre competir por quantidades, à la Cournot, ou por preços, à la Bertrand. Yan et al. (2024) estudam o efeito da propaganda persuasiva e da discriminação de preços em um duopólio onde as firmas podem ou não utilizar informações pessoais eletrônicas dos consumidores para discriminar preços. Por outro lado, utilizando uma abordagem empírica, Nisa et al. (2025) encontram evidências de que tanto a propaganda quanto a diferenciação de produtos têm impacto positivo nas decisões de compra de consumidores.

Dado esse contexto, o objetivo do presente artigo teórico é analisar os efeitos da propaganda em um duopólio de Cournot com produtos diferenciados, considerando funções de demanda lineares. A estrutura apresentada em Dixit (1979) é aqui adaptada por meio da introdução de um parâmetro que representa o gasto em propaganda, sendo esta a principal contribuição deste estudo. A partir disso, busca-se examinar de que forma o equilíbrio do duopólio – dado pelas quantidades, preços e lucros de equilíbrio – são influenciadas pela inclusão do novo parâmetro no modelo. Assim, julga-se esta análise relevante no sentido de que trata de um tema atual e dinâmico, uma vez que tem como objeto central a propaganda, a qual está em constante evolução para acompanhar a rápida mudança nos meios de comunicação. Em especial, em mercados oligopolistas com produtos diferenciados, nos quais as escolhas da firma em relação à propaganda exercem influência direta sobre a dinâmica concorrencial, a configuração do mercado e a percepção subjetiva do consumidor.

O presente artigo está organizado em três seções principais, além desta introdução e das considerações finais. A seção 1 apresenta o problema do consumidor e as respectivas curvas de demanda inversas em um mercado com dois bens diferenciados, base do modelo de duopólio proposto. Já na seção 2, apresenta-se a formulação do duopólio de Cournot com propaganda, da qual são obtidos analiticamente os valores de equilíbrio para quantidades, preços e lucros. A seção 3 dedica-se à análise do impacto da propaganda, comparando os cenários com e sem investimento publicitário e apresentando exemplos numéricos que corroboram as proposições teóricas. Por fim, apresentam-se as principais conclusões deste trabalho e perspectivas de pesquisas futuras.

1 Problema do consumidor

Seguindo Dixit (1979), Singh e Vives (1984) e Shy (1995), neste trabalho considera-se um mercado composto por dois bens diferenciados, indexados por $i = 1,2$. Assume-se a existência de um contínuo de consumidores idênticos, cuja utilidade é representada por uma função separável e quadrática. Desconsiderando o efeito-renda e adotando parâmetros homogêneos, o problema do consumidor pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\max_{q_1, q_2 > 0} f = U(q_1, q_2) - p_1 q_1 - p_2 q_2, \qquad (1)$$

onde q_1, q_2 e p_1, p_2 são, respectivamente, as quantidades e os preços dos bens 1 e 2, e:

$$U(q_1, q_2) = \mu q_1 + \mu q_2 - \frac{1}{2}(\beta q_1^2 + 2\delta q_1 q_2 + \beta q_2^2), \qquad \mu > 0, \qquad (2)$$

é uma função de utilidade estritamente côncava quando $\beta > 0$ e $\beta^2 - \delta^2 > 0$.

Supondo $0 \leq \delta < \beta$, ao aplicar as condições de primeira ordem para o problema de maximização (1)-(2), obtém-se as funções de demanda inversa do consumidor, isto é, os preços dos produtos em função de suas quantidades:

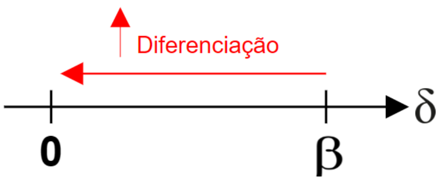
$$p_1 = \mu - \beta q_1 - \delta q_2, \qquad (3)$$

$$p_2 = \mu - \delta q_1 - \beta q_2. \qquad (4)$$

Nesse modelo, o parâmetro μ é o preço máximo que os consumidores estão dispostos a pagar pelos produtos, enquanto o parâmetro β captura o efeito direto de q_i sobre p_i, $i = 1,2$, ao passo que o parâmetro δ captura o efeito cruzado, isto é, de q_1 sobre p_2 e de q_2 sobre p_1. Assim, dado $\beta > 0$, se $\delta = 0$, as demandas dos dois bens são independentes uma da outra, e os dois bens podem ser considerados como independentes, ou completamente diferenciados.

À medida que δ aumenta, tendendo à β, a influência cruzada entre as duas demandas aumenta, elevando a substituibilidade entre os dois produtos e, por conseguinte, o seu grau de homogeneidade. Logo, supondo $\beta > 0$ fixo e dado desde o princípio, δ será o parâmetro utilizado para capturar o grau de diferenciação de produtos. Conforme ilustrado na Figura 1, quanto menor for o valor do parâmetro δ, maior será a percepção de diferenciação entre os dois bens por parte dos consumidores. Em outras palavras, no limite inferior, quando $\delta \to 0$, os produtos são entendidos como totalmente diferenciados, enquanto à medida que δ se desloca à direita, tendendo a β, essa diferenciação decresce até que os produtos sejam vistos como idênticos.

Figura 1 - Intervalo do grau de diferenciação δ.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Considerando que cada tipo de bem seja produzido por apenas uma firma e que a propaganda tende a aumentar a percepção de diferenciação entre os dois produtos, propõe-se aqui que δ deixe de ser constante e passe a ser escrito como função do nível de gasto em propaganda das firmas 1 e 2, denotados por $A_1 > 0$ e $A_2 > 0$, respectivamente, seguindo a seguinte forma funcional:

$$\tilde{\delta}(A_1 A_2) = \delta(A_1 A_2)^{-\alpha}, \qquad A_1, A_2, \alpha > 0, \delta \geq 0, \tag{5}$$

sendo $\alpha > 0$ um parâmetro exógeno que mede a intensidade na qual o gasto em propaganda afeta a percepção de diferenciação dos produtos: quanto maior o seu valor, maior é o impacto da propaganda nesta percepção de diferenciação, e consequentemente nas demandas. Vale ressaltar que, quando $\alpha = 0$, $\tilde{\delta}(A_1 A_2) \equiv \delta$ torna-se constante, obtendo-se assim o modelo original sem propaganda, conforme proposto por Dixit (1979). Além disso, para $\alpha > 0$, quanto maior for o gasto em propaganda das firmas, menor é o valor de $\tilde{\delta}(A_1 A_2)$, e assim maior é a percepção de diferenciação entre os dois produtos por parte dos consumidores.

Desse modo, as funções de demanda inversa do consumidor (3)-(4) considerando o gasto em propaganda podem ser reescritas como:

$$p_1 = \mu - \beta q_1 - \delta(A_1 A_2)^{-\alpha} q_2, \tag{6}$$

$$p_2 = \mu - \delta(A_1 A_2)^{-\alpha} q_1 - \beta q_2, \ \mu, \beta > 0, \ \delta \geq 0. \tag{7}$$

2 Duopólio de Cournot com produtos diferenciados e propaganda

Apresenta-se aqui o modelo de duopólio de Cournot com produtos diferenciados, considerando o gasto em propaganda por parte das firmas. Considera-se que as duas firmas possuem as seguintes funções de custo lineares:

$$C_i(q_i, A_i) = c q_i + A_i, \qquad i = 1,2, \tag{8}$$

sendo $c \geq 0$ o custo marginal constante, igual para ambas as firmas, e $A_i > 0$ o gasto em propaganda de cada firma $i = 1,2$, que é considerado custo fixo, pois independe da quantidade.

Já as funções de lucro de cada firma são expressas por:

$$\pi_i(q_1, q_2, A_1, A_2) = p_i q_i - c q_i - A_i, \quad c \geq 0, A_i > 0, i = 1,2. \tag{9}$$

Ao substituir (6)-(7) em (9), estas funções lucro podem ser reescritas como:

$$\begin{cases} \pi_1(q_1, q_2, A_1, A_2) = [\mu - \beta q_1 - \delta(A_1 A_2)^{-\alpha} q_2] q_1 - c q_1 - A_1 \\ \pi_2(q_1, q_2, A_1, A_2) = [\mu - \delta(A_1 A_2)^{-\alpha} q_1 - \beta q_2] q_2 - c q_2 - A_2 \end{cases}. \tag{10}$$

Então, aplicando as condições de primeira ordem em relação às quantidades, a fim de maximizar os lucros individuais dados em (10), obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 0 \iff \mu - 2\beta q_1 - \delta(A_1 A_2)^{-\alpha} q_2 = c \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0 \iff \mu - \delta(A_1 A_2)^{-\alpha} q_1 - 2\beta q_2 = c \end{cases}. \tag{11}$$

Pela simetria do sistema de equações (11), conclui-se que $q_1 = q_2 = q$, ou seja, no ótimo as empresas produzem a mesma quantidade de bens.

Já aplicando as condições de primeira ordem em (10), porém agora em relação aos gastos em propaganda, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial A_1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{A_1}\alpha\delta A_1^{-\alpha}A_2^{-\alpha}q_1q_2 = 1 \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{A_2}\alpha\delta A_1^{-\alpha}A_2^{-\alpha}q_1q_2 = 1 \end{cases}. \tag{12}$$

Novamente, pela simetria do sistema (12), chega-se à conclusão de que, no ótimo, os gastos em propaganda das duas firmas serão iguais, ou seja, $A_1 = A_2 = A$.

Assim, substituindo A_1 e A_2 simplesmente por A, e q_1 e q_2 apenas por q em ambos os sistemas (11) e (12), é possível simplificar as condições de primeira ordem que originalmente envolviam quatro equações em quatro variáveis para um sistema envolvendo apenas duas equações em duas variáveis, q e A. Assim, os valores de equilíbrio de duopólio para a quantidade e o gasto em propaganda são soluções do sistema:

$$\begin{cases} \mu - (2\beta + \delta A^{-2\alpha})q = c \\ \alpha\delta q^2 = A^{2\alpha+1} \end{cases}. \tag{13}$$

Isolando o q na segunda expressão do sistema (13), chega-se a seguinte expressão:

$$q(A) = \frac{A^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\alpha\delta}}. \tag{14}$$

Substituindo (14) na primeira equação do sistema (13), encontra-se a seguinte equação envolvendo apenas o gasto em propaganda, A:

$$\sqrt{\alpha\delta}(\mu - c) = 2\beta A^{\alpha+\frac{1}{2}} + \delta A^{\frac{1}{2}-\alpha}, \tag{15}$$

cuja solução fornece o gasto ótimo em propaganda de duopólio, A^*. Ao substituí-lo na equação (14), nas demandas inversas (6)-(7) e nas funções de lucro (10), é possível encontrar, respectivamente, os valores de equilíbrio para as quantidades, q_A^*, os preços, p_A^*, e os lucros, π_A^*, do duopólio de Cournot com propaganda.

Em geral, para $\alpha > 0$, a equação (15) não possui solução analítica, tendo-se então de utilizar algum método numérico para resolvê-la. Entretanto, uma solução analítica pode ser encontrada para os casos particulares em que $\alpha = 0$ (o implica que $A^* = 0$, recuperando assim o modelo original sem propaganda) e em que $\alpha = \frac{1}{2}$. Tendo em vista que esse último caso particular é qualitativamente representativo dos casos nos quais não há solução analítica, este será considerado daqui para frente, por permitir tratabilidade analítica. Então, substituindo $\alpha = \frac{1}{2}$ na equação (15), obtém-se:

$$\sqrt{\frac{\delta}{2}(\mu - c)} = 2\beta A + \delta, \tag{16}$$

cuja solução é o gasto ótimo em propaganda:

$$A^* = \frac{\sqrt{\frac{\delta}{2}(\mu - c)} - \delta}{2\beta}. \tag{17}$$

Sendo assim, os demais valores de equilíbrio do duopólio de Cournot com propaganda são dados por:

$$q_A^* = \frac{(\mu - c) - \sqrt{2\delta}}{2\beta}, \tag{18}$$

$$p_A^* = \frac{\mu + c - \sqrt{2\delta}}{2}, \tag{19}$$

$$\pi_A^* = \frac{(\mu - c)^2 - 3\sqrt{2\delta}(\mu - c) + 4\delta}{4\beta}. \tag{20}$$

A Tabela 1 a seguir sintetiza os equilíbrios de Cournot, sem e com gasto em propaganda. Esses resultados servirão como base para a análise comparativa entre os dois cenários que será desenvolvida no decorrer da próxima seção. Note que os resultados para o caso sem propaganda podem ser obtidos tomando o limite $\alpha \to 0$ no sistema (13), e substituindo o resultado nas funções de demanda inversas e nas funções lucro.

Tabela 1 – Valores dos equilíbrios de Cournot, sem e com propaganda

	Sem Propaganda	Com Propaganda (α = 0,5)
Quantidade	$\frac{\mu - c}{2\beta + \delta}$	$\frac{(\mu - c) - \sqrt{2\delta}}{2\beta}$
Preço	$\frac{\mu\beta + c(\beta + \delta)}{2\beta + \delta}$	$\frac{\mu + c - \sqrt{2\delta}}{2}$
Lucro	$\frac{\beta(\mu - c)^2}{(2\beta + \delta)^2}$	$\frac{(\mu - c)^2 - 3\sqrt{2\delta}(\mu - c) + 4\delta}{4\beta}$
Gasto em Propaganda	0	$\frac{\sqrt{\delta/2}(\mu - c) - \delta}{2\beta}$

Fonte: Elaborado pelos autores.

Observe que, no modelo com propaganda, é necessário que $(\mu - c) - \sqrt{2\delta} > 0$ para que quantidades, preços e gastos em propaganda sejam positivos, o que motiva a definição de um novo parâmetro θ dado por:

$$\theta \stackrel{\text{def}}{=} \mu - c > \sqrt{2\delta}. \tag{21}$$

Esse parâmetro θ está inversamente relacionado com o grau de eficiência dos duopolistas, isso porque quando o custo marginal das firmas diminui, $\downarrow c$, *ceteris paribus*, há um aumento em θ. Além disso, ele está diretamente relacionado com o preço máximo que os consumidores estão dispostos a pagar pelos bens, dado pelo parâmetro μ, pois $\uparrow \mu$, *ceteris paribus*, causa um aumento em θ.

Tendo em vista que se pretende comparar os resultados dos modelos com e sem propaganda, faz-se necessário considerar que $\theta = \mu - c > \sqrt{2\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{min}$, a fim de garantir a existência de equilíbrios economicamente factíveis no intervalo $0 \leq \delta < \beta$.

Além disso, a fim de que os duopolistas obtenham lucros positivos no cenário com propaganda, é necessário que:

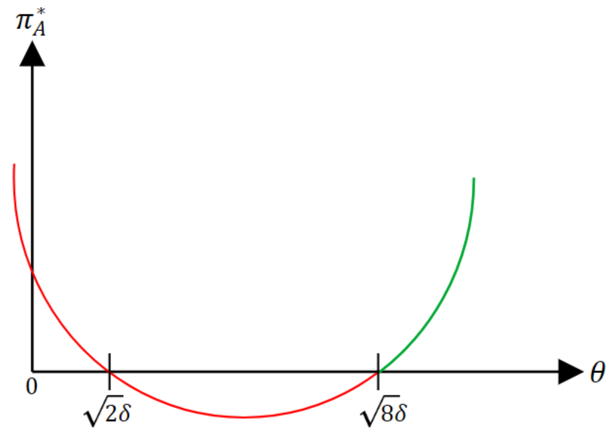
$$\theta > \sqrt{8\delta}. \tag{22}$$

Essa última condição surge da análise da equação do lucro no caso com propaganda (20). Dado que $\theta = \mu - c$, a equação (20) pode ser reescrita como:

$$\pi_A^* = \frac{\theta^2 - \sqrt{18\delta}\theta + 4\delta}{4\beta}. \tag{23}$$

Assim, o sinal do lucro será dado pelo numerador dessa expressão (23), que é o polinômio de grau 2 ilustrado na Figura 2. Conforme mostra essa figura, este polinômio é convexo, apresentando lucratividade negativa no intervalo entre suas raízes $\sqrt{2\delta}$ e $\sqrt{8\delta}$. Dessa forma, o duopólio com propaganda só apresentará lucros positivos quando $\theta > \sqrt{8\delta}$, isto é, quando as firmas forem suficientemente eficientes e/ou quando o preço máximo que os consumidores estiverem dispostos a pagar pelos bens for suficientemente alto, caso representado pelo segmento verde da função apresentada na figura.

Figura 2 – Comportamento do lucro em relação à θ.



Fonte: Elaborado pelos autores.

A fim de que a solução ótima encontrada acima seja efetivamente um ponto de maximização de lucro, lembre-se que a seguinte condição deve ser satisfeita: $\tilde{\delta} = \delta(A^*)^{-2\alpha} < \beta$. Dessa maneira, sendo $\alpha = \frac{1}{2}$, é preciso que:

$$\frac{\delta}{A^*} < \beta \Leftrightarrow A^* > \frac{\delta}{\beta}, \tag{24}$$

condição que pode ser reescrita, considerando (17) e (21), como:

$$\frac{1}{2\beta}\left(\sqrt{\frac{\delta}{2}}\theta - \delta\right) > \frac{\delta}{\beta}. \tag{25}$$

De (25), temos então que:

$$\theta > 3\sqrt{2\delta}. \tag{26}$$

Ou seja, para que se obtenha lucro efetivamente máximo, a eficiência das firmas, ou o preço máximo que os consumidores estão dispostos a pagar pelos bens, deve ser grande o suficiente.

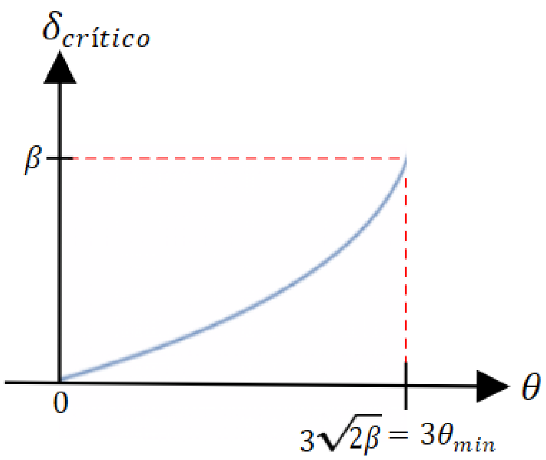
Observe que se $\theta > 3\sqrt{2\beta} = 3\theta_{min}$, isso garante que $\theta > 3\sqrt{2\delta}$ no intervalo $0 \leq \delta < \beta$. Se este não for o caso, isto é, se $\theta < 3\theta_{min}$, é necessário que o δ seja menor do que um certo valor crítico:

$$\theta > 3\sqrt{2\delta} \Leftrightarrow \delta < \frac{\theta^2}{18} = \delta_{crítico} \tag{27}$$

para garantir que a solução encontrada seja maximizadora de lucro. Neste caso, o modelo apresenta sentido econômico somente para valores baixos de δ, ou seja, firmas com baixa eficiência produtiva só conseguem operar de forma ótima se os produtos forem mais diferenciados.

A Figura 3 apresenta este limiar crítico de consistência econômica do modelo, $\delta_{crítico}$, como função do parâmetro θ no caso em que $\theta < 3\theta_{min}$. Observe que apenas valores de δ abaixo da curva em azul representam cenários nos quais a solução do modelo faz sentido econômico, i.e., atende às condições de maximização de lucro.

Figura 3 – Eficiência da firma em relação ao grau crítico de diferenciação de produtos.



Fonte: Elaborado pelos autores.

3 Impacto da propaganda no duopólio de Cournot

Esta seção dedica-se à análise comparativa entre os modelos de duopólio de Cournot com e sem propaganda. A partir dos resultados apresentados na Tabela 1, serão calculadas as variações entre os valores de equilíbrio com e sem propaganda para quantidades, preços e lucros, a fim de mensurar o impacto do gasto em propaganda nessas variáveis.

3.1 Impacto da propaganda na quantidade e no preço

Sob essa perspectiva, o primeiro caso a ser analisado é a variação da quantidade de equilíbrio nos dois cenários. Assim, da Tabela 1 tem-se que:

$$\Delta q = q_A^* - q^* = \frac{(\mu - c) - \sqrt{2\delta}}{2\beta} - \frac{(\mu - c)}{2\beta + \delta}, \tag{28}$$

expressão que pode ser reescrita em termos de $\theta = \mu - c$ como:

$$\Delta q = \frac{\delta\theta - \sqrt{2\delta}(2\beta + \delta)}{2\beta(2\beta + \delta)}, \tag{29}$$

Como $2\beta(2\beta + \delta) > 0$, o sinal de (29) é determinado pelo sinal de seu numerador.

Por sua vez, a variação entre os preços com e sem propaganda é a seguinte:

$$\Delta p = p_A^* - p^* = \frac{\mu + c - \sqrt{2\delta}}{2} - \left(\frac{\mu\beta + c(\beta + \delta)}{2\beta + \delta}\right), \tag{30}$$

que simplifica em:

$$\Delta p = \frac{\delta\theta - \sqrt{2\delta}(2\beta + \delta)}{2(2\beta + \delta)}. \tag{31}$$

Novamente, como $2(2\beta + \delta) > 0$, Δp tem seu sinal determinado por seu numerador.

Dessa maneira, de (29) e (31) tem-se que o sinal do impacto da propaganda na quantidade e no preço de Cournot é dado por:

$$sinal(\Delta q) = sinal(\Delta p) = sinal\left(\delta\theta - \sqrt{2\delta}(2\beta + \delta)\right). \tag{32}$$

Se os bens forem totalmente diferenciados, isto é, quando $\delta = 0$, o gasto em propaganda ótimo é nulo ($A^* = 0$), logo, não há impacto da propaganda na quantidade e no preço de equilíbrio de duopólio. Além disso, pela Tabela 1, vê-se que neste cenário extremo não apenas $\Delta q = \Delta p = 0$, mas também não há impacto no lucro: $\Delta\pi = \pi_p^* - \pi^* = 0$.

Como quer-se analisar os casos em que existe diferenciação parcial de produtos, considera-se então que $0 \leq \delta < \beta$. Assim, de (32) obtém-se:

$$\Delta q, \Delta p \geq 0 \Leftrightarrow \delta\theta - \sqrt{2\delta}(2\beta + \delta) \geq 0, \tag{33}$$

condição que, elevada ao quadrado, pode ser reescrita como:

$$\Delta q, \Delta p \geq 0 \Leftrightarrow \varphi(\delta) \stackrel{\text{def}}{=} 2\delta^2 + (8\beta - \theta^2)\delta + 8\beta^2 \leq 0, \tag{34}$$

onde definimos a função quadrática estritamente convexa $\varphi(\delta)$ por (34). Desta forma, o sinal do impacto da propaganda na quantidade e no preço será determinado pelo sinal de $\varphi(\delta)$ no intervalo $0 \leq \delta < \beta$. Como $\theta > 0$, as raízes de $\varphi(\delta)$ podem ser escritas como:

$$\varphi(\delta) = 0 \Leftrightarrow \delta_{1,2} = \frac{\theta^2 - 8\beta \pm \theta\sqrt{\theta^2 - 16\beta}}{4}, \tag{35}$$

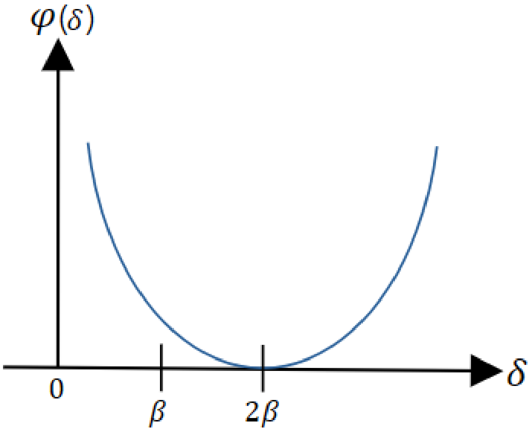
sendo δ_1 a raiz de $\varphi(\delta)$ relacionada à raiz quadrada negativa, e δ_2 aquela relacionada à raiz quadrada positiva. A partir deste ponto, a análise segmenta-se em três cenários possíveis, definidos pelo comportamento dos parâmetros $\theta > \sqrt{2\beta} = \theta_{min}$ e $\beta > 0$.

No primeiro caso, considera-se $\theta^2 = 16\beta$ ou, equivalentemente, $\theta = 4\sqrt{\beta} = 2\sqrt{2}\,\theta_{min} \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{c1}$, onde definimos este novo parâmetro crítico $\theta_{c1} = 2\sqrt{2}\,\theta_{min}$. Nesse caso, por (35), a função $\varphi(\delta)$ apresenta raiz real positiva dupla, dada por:

$$\delta_1 = \delta_2 = 2\beta > \beta > 0. \tag{36}$$

O comportamento da função $\varphi(\delta)$ quando $\theta = \theta_{c1}$ está ilustrado na Figura 4. Note que a raiz $\delta = 2\beta$ encontra-se fora do intervalo de interesse do modelo ($0 \leq \delta < \beta$). Assim, $\varphi(\delta) > 0$ neste intervalo, o que implica que $\Delta q, \Delta p < 0$. Economicamente, isso indica que, para esse nível de eficiência, o impacto da propaganda nas quantidades e nos preços se mantém negativo para qualquer grau de diferenciação de produtos.

Figura 4 – Comportamento da função $\varphi(\delta)$ em relação à δ quando $\theta = 4\sqrt{\beta} = \theta_{c1}$.



Fonte: Elaborado pelos autores.

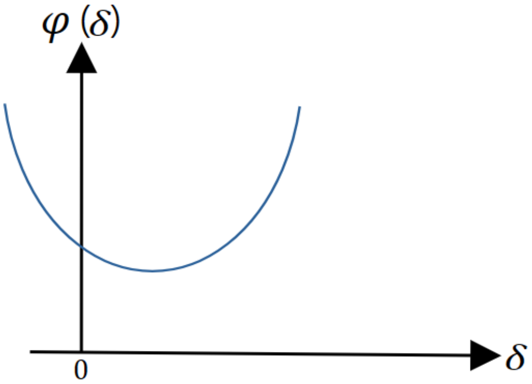
O segundo caso ocorre quando $\theta_{min} < \theta^2 < 16\beta \Leftrightarrow \theta_{min} < \theta < 4\sqrt{\beta} = \theta_{c1}$. Assim, pela equação (35) tem-se que $\varphi(\delta)$ apresenta duas raízes complexas conjugadas:

$$\delta_{1,2} = a \pm bi \in \mathbb{C}, \tag{37}$$

cenário no qual $\varphi(\delta) > 0$ para qualquer valor de δ, de forma que, novamente, tem-se $\Delta q, \Delta p < 0$ para $0 \leq \delta < \beta$.

Esse segundo caso está ilustrado na Figura 5, na qual se verifica que a função $\varphi(\delta)$ assume apenas valores positivos, não interceptando o eixo horizontal, pois possui raízes complexas conjugadas. Logo, para firmas com baixa eficiência, o gasto em propaganda resulta, invariavelmente, em uma queda na quantidade e no preço de duopólio.

Figura 5 – Comportamento da função $\varphi(\delta)$ em relação à δ quando $\theta_{min} < \theta < 4\sqrt{\beta} = \theta_{c1}$.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Resumindo os dois casos analisados acima, tem-se que $\Delta q, \Delta p < 0$ quando $\sqrt{2\beta} = \theta_{min} < \theta \leq \theta_{c1} = 4\sqrt{\beta}$. Isto é, em termos econômicos, o impacto da propaganda nas quantidades e nos preços de duopólio de Cournot é negativo para duopolistas ineficientes, i.e., quando $\theta_{min} < \theta \leq \theta_{c1}$ e/ou quando o preço máximo que os consumidores estão dispostos a pagar pelos produtos é baixo:

$$\theta_{min} < \theta \leq \theta_{c1} \Rightarrow \Delta q, \Delta p < 0. \tag{38}$$

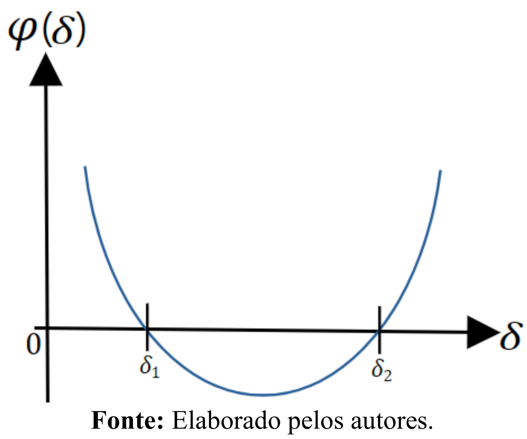
O terceiro caso, $\theta^2 > 16\beta \Leftrightarrow \theta > \theta_{c1}$, ocorre quando o valor do parâmetro θ supera o limiar crítico $\theta_{c1} = 4\sqrt{\beta}$, o que representa economicamente a situação na qual os duopolistas são muito eficientes e/ou quando o preço máximo que os consumidores estão dispostos a pagar pelos produtos é muito alto. Nesse cenário, a equação (35) apresenta duas raízes reais positivas e distintas, $\delta_1 \neq \delta_2$, com $0 < \delta_1 < \delta_2$, sendo:

$$\delta_1 = \frac{\theta^2 - 8\beta - \theta\sqrt{\theta^2 - 16\beta}}{4}, \tag{39}$$

$$\delta_2 = \frac{\theta^2 - 8\beta + \theta\sqrt{\theta^2 - 16\beta}}{4}. \tag{40}$$

O comportamento da função $\varphi(\delta)$ quando $\theta > \theta_{c1} = 4\sqrt{\beta}$ está ilustrado na Figura 6, em que se verifica uma mudança qualitativa no modelo oriunda da superação do valor crítico θ_{c1}. Neste caso a função $\varphi(\delta)$ assume valores negativos apenas no intervalo entre as raízes $\delta_1 < \delta < \delta_2$.

Figura 6 – Comportamento da função $\varphi(\delta)$ em relação à δ quando $\theta > 4\sqrt{\beta} = \theta_{c1}$.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Entretanto, dado o intervalo de interesse $0 \leq \delta < \beta$, é necessário verificar em que ponto se encontra o limite superior, $\beta > 0$. Como δ_2 é o valor máximo em que se tem $\varphi(\delta) < 0$, analisa-se inicialmente quando $\delta_2 \gtreqless \beta$.

Como $\theta\sqrt{\theta^2 - 16\beta} > 0$ e $\theta^2 \geq 16\beta$, a expressão (40) implica que a segunda raiz deve satisfazer:

$$\delta_2 = \frac{\theta^2 - 8\beta + \theta\sqrt{\theta^2 - 16\beta}}{4} > \frac{\theta^2 - 8\beta}{4} > \frac{16\beta - 8\beta}{4} = 2\beta > \beta. \tag{41}$$

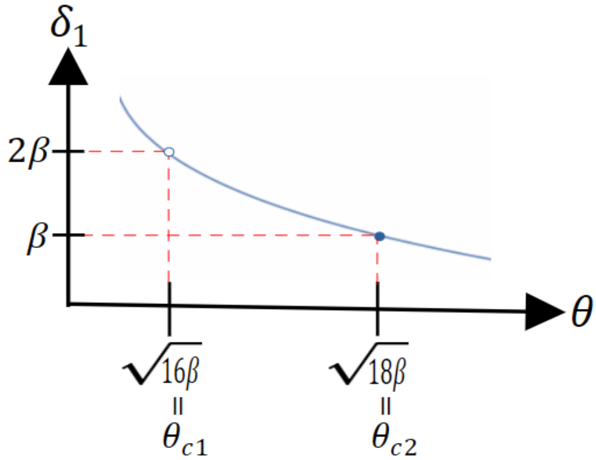
Logo, conclui-se que δ_2 é maior que o limite máximo para δ, $0 \leq \delta < \beta$. Dado que δ_2 está fora do espaço de parâmetros relevante para o modelo, a análise de sinal dentro do intervalo $0 \leq \delta < \beta$ depende do valor que δ_1 assume. Isso significa que $\varphi(\delta) > 0$ para o intervalo $0 \leq \delta < \delta_1$, $\varphi(\delta_1) = 0$ e $\varphi(\delta) < 0$ para o intervalo $\delta_1 < \delta < \beta$.

Note que, no caso limite $\theta \to \theta_{c1} = 4\sqrt{\beta}$, ambas as raízes se tornam iguais, $\delta_1, \delta_2 \to 2\beta$, replicando os resultados do primeiro caso analisado acima. Além disso, se $\theta = \sqrt{18\beta} = 3\theta_{min} > \theta_{c1} = 2\sqrt{2}\,\theta_{min}$, tem-se que:

$$\delta_1 = \frac{18\beta - 8\beta - \sqrt{18\beta}\sqrt{18\beta - 16\beta}}{4} = \frac{10\beta - \sqrt{36\beta^2}}{4} = \frac{10\beta - 6\beta}{4} = \beta. \tag{42}$$

Na Figura 7 apresenta-se o gráfico da raiz δ_1 como função de θ. Ali pode-se ver que se $\theta_{c1} < \theta \leq 3\theta_{min} \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{c2}$, onde definimos o segundo valor crítico $\theta_{c2} = 3\theta_{min}$, então $\delta_1 \geq \beta$ e, assim, $\varphi(\delta) > 0$ para qualquer valor no intervalo $0 \leq \delta < \beta$. Por outro lado, para $\theta > \theta_{c2} = 3\theta_{min}$, tem-se que $\varphi(\delta) > 0$ para $0 \leq \delta \leq \delta_1 < \beta$ (intervalo em que os produtos são mais diferenciados), $\varphi(\delta_1) = 0$ e $\varphi(\delta) < 0$ para $\delta_1 < \delta < \beta$ (intervalo em que os produtos são mais homogêneos).

Figura 7 – Comportamento de δ_1 em relação à θ.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Ou seja, este terceiro caso se desdobrou em dois subcasos:

$$\begin{cases} \theta_{c1} < \theta \leq \theta_{c2} \Rightarrow \Delta q, \Delta p < 0 \text{ em } 0 \leq \delta < \beta \\ \theta > \theta_{c2} \Rightarrow \begin{cases} \Delta q, \Delta p < 0 \text{ em } 0 < \delta < \delta_1 \\ \Delta q, \Delta p < 0 \text{ em } \delta = \delta_1 \\ \Delta q, \Delta p > 0 \text{ em } \delta_1 < \delta < \beta \end{cases} \end{cases} \tag{43}$$

Note que o primeiro subcaso da equação (43) pode ser combinado com os dois primeiros casos apresentados na equação (38), de forma que, renomeando θ_{c2} como $\theta_c = 3\theta_{min}$ a fim de simplificar a notação, tem-se:

$$\theta_{min} < \theta \leq \theta_c \Rightarrow \Delta q, \Delta p < 0 \text{ no intervalo } 0 \leq \delta < \beta \,. \tag{44}$$

Por fim, os resultados obtidos acima são sumarizados na Proposição 1 a seguir.

Proposição 1 – O gasto em propaganda terá o seguinte impacto na quantidade e no preço de equilíbrio de Cournot em um duopólio com diferenciação de produtos e demandas lineares:

I. No caso limite em que os bens são totalmente diferenciados, $\delta = 0$, então $\Delta q, \Delta p = 0$ e o gasto em propaganda não tem impacto na quantidade e no preço de equilíbrio de Cournot.
II. Se os bens forem parcialmente diferenciados, $0 < \delta < \beta$, então os seguintes casos podem ocorrer:

(i) Se $\theta_{min} < \theta \leq \theta_c$, então $\Delta q, \Delta p < 0$ para $0 < \delta < \beta$, isto é, o gasto em propaganda diminui a quantidade e o preço de equilíbrio de Cournot.

(ii) Se $\theta > \theta_c$, então $\begin{cases} \Delta q, \Delta p < 0 \text{ em } 0 < \delta < \delta_1 \\ \Delta q, \Delta p = 0 \text{ em } \delta = \delta_1 \\ \Delta q, \Delta p > 0 \text{ em } \delta_1 < \delta < \beta \end{cases}$,

sendo $\theta_{min} = \sqrt{2\beta}$, $\theta_c = 3\sqrt{2\beta} = 3\theta_{min}$, $\delta_1 = \frac{\theta^2 - 8\beta - \theta\sqrt{\theta^2 - 16\beta}}{4}$, $\theta = \mu - c, \beta > 0, \mu > c \geq 0$.

Dessa forma, haverá impacto positivo da propaganda na quantidade e no preço de equilíbrio de Cournot apenas no caso II (ii), isto é se as firmas forem significativamente eficientes, $\theta > \theta_c$, e/ou se o preço máximo que os consumidores estiverem dispostos a pagar pelos produtos for muito alto. Além disso, esse impacto positivo só ocorrerá quando os produtos forem mais homogêneos ($\delta_1 < \delta < \beta$). No caso da quantidade, este resultado é qualitativamente similar ao obtido por Kremer (2025) em um duopólio de Cournot com propaganda e produtos homogêneos.

Além disso, note que à medida que a eficiência das firmas - e/ou se o preço máximo que os consumidores estiverem dispostos a pagar pelos produtos - aumenta, $\theta \nearrow \infty$, temos que $\delta_1(\theta) \searrow 0^+$, e assim o impacto da propaganda passa a ser positivo também para produtos cada vez mais diferenciados.

3.2 Impacto da propaganda no lucro

Finalizada a análise do impacto da propaganda na quantidade e no preço de equilíbrio, esta seção apresenta o cálculo da variação entre os valores de equilíbrio com e sem propaganda para o lucro.

Ainda considerando $\theta = \mu - c$, da Tabela 1 tem-se que a variação do lucro é dada por:

$$\Delta\pi = \pi_A^* - \pi^* = \frac{\theta^2 - 3\sqrt{2\delta}\theta + 4\delta}{4\beta} - \frac{\beta\theta^2}{(2\beta + \delta)^2}, \tag{45}$$

que é igual a:

$$\Delta\pi = \frac{\tilde{\varphi}(\delta)}{4\beta(2\beta + \delta)^2}, \tag{46}$$

onde definiu-se:

$$\tilde{\varphi}(\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \delta^{1/2}\Big[-3\sqrt{2}\theta\delta^2 - 12\sqrt{2}\theta\beta\delta - 12\sqrt{2}\theta\beta^2 + 4\beta(\theta^2 + 4\beta)\delta^{1/2} + (\theta^2 + 16\beta)\delta^{3/2} + 4\delta^{5/2}\Big]. \tag{47}$$

Observe que, se os bens são independentes ou totalmente diferenciados ($\delta = 0$), tem-se $\tilde{\varphi}(0) = 0$ e não há impacto da propaganda no lucro de equilíbrio de duopólio, $\Delta\pi = \pi_p^* - \pi^* = 0$. Além disso, como $4\beta(2\beta + \delta)^2 > 0$, o sinal do impacto da propaganda no lucro de Cournot (46) é determinado pelo sinal da função algébrica $\tilde{\varphi}(\delta)$.

A fim de determinar o sinal de $\tilde{\varphi}(\delta)$ em uma vizinhança positiva da origem, note que se trata de uma função contínua e que sua primeira derivada, $\tilde{\varphi}'(\delta)$, é dada por:

$$\tilde{\varphi}'(\delta) = 12\delta^2 - \frac{15}{2}\sqrt{2}\theta\delta^{3/2} + (2\theta^2 + 32\beta)\delta - 18\sqrt{2\delta}\beta\theta + 4\beta\theta^2 + 16\beta^2 - \frac{6\sqrt{2}\beta^2\theta}{\sqrt{\delta}}, \tag{48}$$

o que implica que:

$$\lim_{\delta \to 0^+} \tilde{\varphi}'(\delta) = -\infty, \tag{49}$$

isto é, $\tilde{\varphi}(\delta)$ é função decrescente de δ em uma vizinhança positiva da origem. Assim, como $\tilde{\varphi}(0) = 0$, por continuidade existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\tilde{\varphi}(\delta) < 0$.

Isso implica que, quando os bens são muito diferenciados ($0 < \delta < \varepsilon$), a variação no lucro de equilíbrio do duopólio de Cournot é negativa, $\Delta\pi < 0$. Portanto, o lucro sob o regime com propaganda é menor que sob o regime sem propaganda, $\pi_A^* < \pi^*$.

Por outro lado, o sinal da função $\tilde{\varphi}(\delta)$ quando os bens são muito parecidos, ou seja, no limite máximo $\delta \to \beta$, é dado pelo sinal de:

$$\tilde{\varphi}(\beta) = \beta^2\left(5\theta^2 - 27\sqrt{2}\beta^{1/2}\theta + 36\beta\right), \tag{50}$$

cujo sinal, de fato, depende apenas da função quadrática estritamente convexa:

$$\psi(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} 5\theta^2 - 27\sqrt{2}\beta^{1/2}\theta + 36\beta. \tag{51}$$

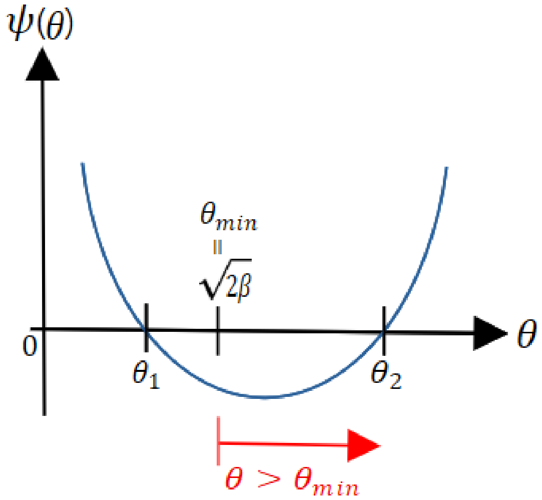
As raízes da função $\psi(\theta)$ são dadas por:

$$\psi(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta_{1,2} = \left(\frac{27 \pm 3\sqrt{41}}{10}\right)\sqrt{2\beta} = \left(\frac{27 \pm 3\sqrt{41}}{10}\right)\theta_{min}, \tag{52}$$

sendo θ_1 a raiz de $\psi(\theta)$ relacionada à raiz quadrada negativa e θ_2 a raiz de $\psi(\theta)$ relacionada à raiz quadrada positiva.

A Figura 8 apresenta o gráfico da função $\psi(\theta)$, cujo sinal determina o impacto da propaganda no lucro de equilíbrio quando os bens tendem à homogeneidade ($\delta \to \beta$). Observe que $0 < \theta_1 < \theta_{min} < \theta_2$, isto é, apenas a segunda raiz, θ_2, apresenta relevância econômica, uma vez que se situa acima do nível mínimo de eficiência operacional θ_{min}.

Figura 8 – Comportamento de $\psi(\theta)$ em relação à θ.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Sendo assim, quando $\theta > \theta_2 = \left(\frac{27+3\sqrt{41}}{10}\right)\theta_{min} > \theta_c = 3\theta_{min}$, a função $\psi(\theta)$ assume apenas valores positivos, $\psi(\theta) > 0$, e, portanto, $\tilde{\varphi}(\beta) > 0$. Como $\tilde{\varphi}(\delta) < 0$ em uma vizinhança da origem e $\tilde{\varphi}(\beta) > 0$, pela continuidade de $\tilde{\varphi}(\delta)$ tem-se que o Teorema do Valor Intermediário garante a existência de pelo menos uma raiz de $\tilde{\varphi}(\delta)$ no intervalo $0 < \delta < \beta$ (LIMA, 2009). Conforme justificado no Apêndice, essa raiz, aqui denominada de $\eta = \eta(\theta)$, de fato, é única. Assim, tem-se que $\tilde{\varphi}(\delta) > 0$ no intervalo $\eta < \delta < \beta$ e $\tilde{\varphi}(\delta) < 0$ para $0 < \delta < \eta$. Logo, no cenário no qual as firmas são suficientemente eficientes, $\theta > \theta_2$, o impacto da propaganda no lucro só será positivo quando os produtos forem mais homogêneos: $\Delta\pi > 0 \Leftrightarrow \pi_A^* > \pi^*$ em $\eta < \delta < \beta$.

Por fim, a análise realizada acima é sumarizada na Proposição 2 a seguir.

Proposição 2 – O gasto em propaganda terá o seguinte impacto no lucro de equilíbrio de Cournot em um duopólio com diferenciação de produtos e demandas lineares:

I. No caso limite em que os bens são totalmente diferenciados, $\delta = 0$, o gasto em propaganda não tem impacto no lucro de equilíbrio de Cournot, isto é, $\Delta\pi = 0$.

II. Para bens muito diferenciados, porém parcialmente, o gasto em propaganda tem impacto negativo no lucro, $\Delta\pi < 0$, isto é, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\Delta\pi < 0$ para $0 < \delta < \varepsilon$.

III. Se as firmas forem suficientemente eficientes, $\theta > \left(\frac{27+3\sqrt{41}}{10}\right)\theta_{min}$, $\theta_{min} = \sqrt{2\beta}$, então o gasto em propaganda terá impacto positivo no lucro desde que os bens sejam mais homogêneos, isto é, existe $\eta = \eta(\theta) \in (0, \beta)$ único tal que $\Delta\pi > 0$ para $\eta < \delta < \beta$. Já se os bens forem mais diferenciados, $0 < \delta < \eta$, o impacto da propaganda no lucro é negativo.

Observação – No exemplo numérico apresentado na próxima seção, também mostramos que $\eta \searrow 0^+$ quando $\theta \nearrow \infty$, comportamento análogo ao $\delta_1(\theta)$ da Proposição 1.

Sendo assim, haverá impacto positivo da propaganda no lucro de equilíbrio de Cournot se as firmas forem significativamente eficientes, em um nível superior ao necessário para haver impacto positivo na quantidade e no preço, isto é, se $\theta > \left(\frac{27+3\sqrt{41}}{10}\right)\theta_{min} > \theta_c$, e/ou se o preço máximo que os consumidores estiverem dispostos a pagar pelos produtos for muito alto. Além disso, esse impacto positivo ocorrerá para produtos mais homogêneos, no intervalo $\eta < \delta < \beta$. Novamente, este resultado é qualitativamente similar ao obtido por Kremer (2025).

3.3 Um exemplo numérico

Na análise a seguir, será considerado um cenário em que os bens sejam parcialmente diferenciados, definido pelo intervalo $0 < \delta < \beta$. Com o valor do parâmetro β fixado em uma unidade, $\beta = 1$, estabelecem-se os limites críticos $\theta_{min} = \sqrt{2} \cong 1{,}41$ e $\theta_c = 3\sqrt{2} \cong 4{,}24$, bem como o limiar de diferenciação $\delta_1 = \frac{\theta^2-8-\theta\sqrt{\theta^2-16}}{4}$. Nesse contexto, na Figura 9 mostra-se o impacto da propaganda na quantidade, no preço e no lucro de equilíbrio de Cournot para diferentes níveis de eficiência das firmas, θ. Nota-se que os exemplos numéricos aqui apresentados corroboram os resultados demonstrados formalmente nas Proposições 1 e 2.

Na primeira e na segunda coluna da Figura 9, mostra-se, respectivamente, o impacto da propaganda na quantidade e no preço de equilíbrio de Cournot à medida que as firmas se tornam mais eficientes, $\uparrow \theta$, cujas conclusões teóricas foram postuladas anteriormente na Proposição 1. As três primeiras linhas se referem, respectivamente, aos seguintes níveis de eficiência dos duopolistas: $\theta = 2$, $\theta = 3$ e $\theta = \theta_c = 3\sqrt{2}$, os quais exemplificam o caso $\theta_{min} < \theta \leq \theta_c$. Os resultados demonstram que a variação é negativa, ou seja, o gasto em propaganda diminui tanto a quantidade quanto o preço de equilíbrio de Cournot. Além disso, nota-se que quando as firmas apresentam baixa eficiência produtiva ($\theta = 2$ e $\theta = 3$), a existência de solução é restrita a mercados com alta diferenciação de produtos ($\downarrow \delta$). Por outro lado, o nível de eficiência $\theta = \theta_c = 3\sqrt{2} = 3\theta_{min}$ estabelece o ponto de mudança dos resultados do modelo: para níveis inferiores a esse limiar, a propaganda sempre gera redução no preço e na quantidade, já para níveis superiores, a propaganda passa a promover efeitos positivos sobre essas duas variáveis.

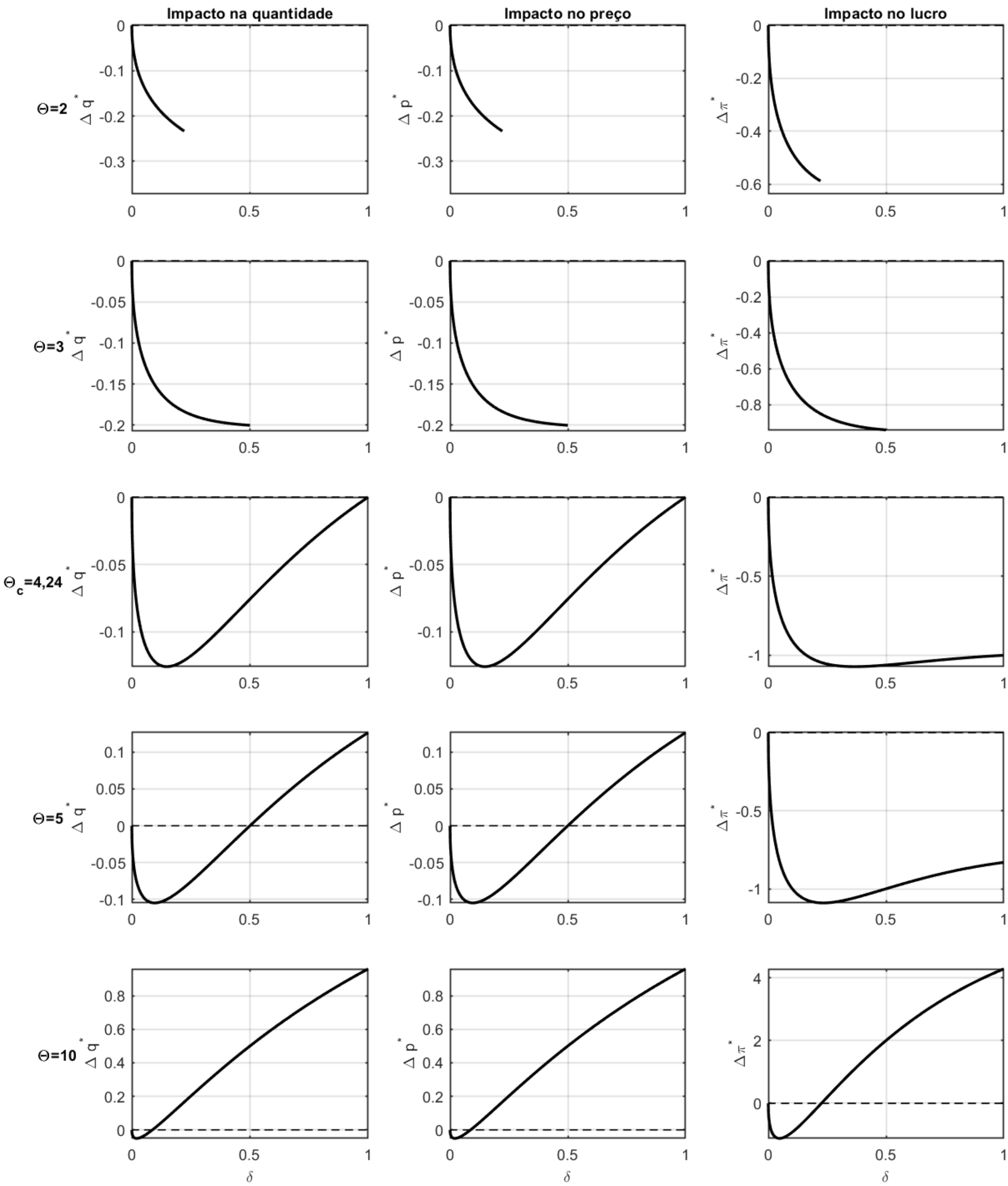
Por sua vez, a quarta e a quinta linha das duas colunas mais à esquerda da Figura 9, referentes aos graus de eficiência $\theta = 5$ e $\theta = 10$, ilustram o cenário em que os duopolistas apresentam alta eficiência produtiva ($\theta > \theta_c$). Agora, o impacto da propaganda na quantidade e no preço de equilíbrio deixa de ser invariavelmente negativo e passa a ser condicionado pelo grau de diferenciação de produtos. Observa-se que, para bens mais diferenciados ($0 < \delta < \delta_1$), o impacto da propaganda permanece negativo, o que indica que esse investimento publicitário ainda gera contração nessas duas variáveis. Entretanto, conforme os produtos se tornam mais similares (aumento da homogeneidade), o efeito da propaganda atinge a neutralidade no ponto crítico $\delta = \delta_1$. A partir desse limiar, no intervalo $\delta_1 < \delta < \beta$, o impacto da propaganda torna-se progressivamente positivo à medida que aumenta a homogeneidade entre os bens ($\uparrow \delta$). Visualmente, comparando $\theta = 10$ com $\theta = 5$, nota-se que quanto maior for a eficiência da firma, não apenas mais rapidamente ocorre essa transição, como também mais intenso é o efeito positivo sobre o mercado, com esse efeito positivo da propaganda ocorrendo em intervalos cada vez maiores de diferenciação de produtos.

A coluna mais à direita da Figura 9 ilustra o impacto da propaganda no lucro de equilíbrio de Cournot à medida que as firmas se tornam mais eficientes, $\uparrow \theta$. Da Proposição 2, tem-se que a propaganda gerará lucro positivo se as firmas forem suficientemente eficientes, o que, matematicamente, é dado pela condição $\theta > \left(\frac{27+3\sqrt{41}}{10}\right)\theta_{min} \cong 6{,}53$. Sob essa perspectiva, na terceira coluna da Figura 9, observa-se que, em todos os cenários em que as firmas estão operando abaixo de tal limiar crítico ($\theta = 2$, $\theta = 3$, $\theta = 3\sqrt{2}$ e $\theta = 5$), a curva de lucro permanece inteiramente no quadrante negativo. Ou seja, mesmo para o caso $\theta = 5$ em que já se verificava um impacto positivo no preço e na quantidade, o lucro ainda é sacrificado pelo custo da propaganda. Assim, o único caso ilustrado que supera o limiar crítico é $\theta = 10$, em que a curva do lucro cruza o eixo zero, gerando aos duopolistas lucros positivos à medida que os produtos se tornam mais homogêneos.

Portanto, pode-se observar que o efeito positivo da propaganda na quantidade e no preço de equilíbrio de Cournot é condicionado: ocorre apenas para bens mais homogêneos ($\delta_1 < \delta < \beta$) e exige que as firmas operem com níveis elevados de eficiência ($\theta > \theta_c$) e/ou que o preço máximo (μ) que os consumidores estão dispostos a pagar pelos produtos seja muito alto. Além disso, a eficiência necessária para que se verifique impacto positivo no lucro ($\theta \cong 6{,}53$) é consideravelmente superior à eficiência necessária para que elas obtenham efeitos positivos na quantidade e no preço ($\theta \cong 4{,}24$). Isso evidencia a existência de um *gap* de eficiência no qual a propaganda pode, ao mesmo tempo, aumentar as vendas e reduzir o lucro em razão dos investimentos publicitários. Consequentemente, o impacto positivo da propaganda no lucro de equilíbrio de Cournot está condicionado a firmas altamente eficientes em mercados de baixa diferenciação de produtos.

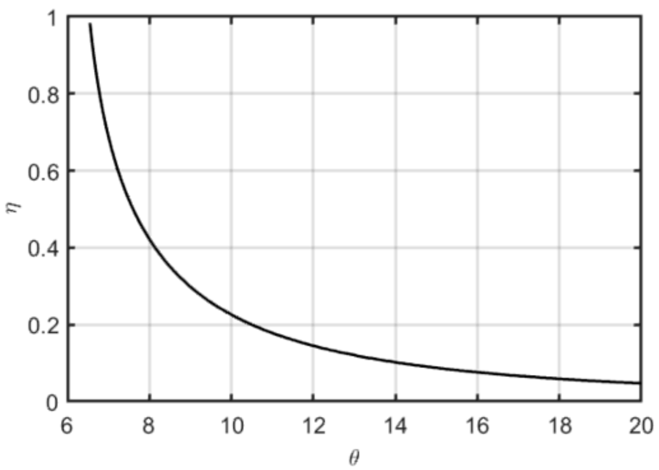
Por fim, na Figura 10 apresenta-se o comportamento da raiz η como função de θ. Conforme o item III da Proposição 2 e a observação subsequente a ela, observa-se que tal raiz é única no intervalo de zero a β, e diminui monotonicamente quanto maior for a eficiência das firmas. Ou seja, quanto maior for a eficiência das firmas, maior será a faixa de diferenciação de produtos na qual o impacto da propaganda no lucro é positivo (pontos acima da curva mostrada no gráfico), abarcando todos os graus de diferenciação quanto $\theta \to \infty$.

Figura 9 – Impacto da propaganda nas quantidades, nos preços e nos lucros de equilíbrio de Cournot para diferentes graus de eficiência das firmas, $\boldsymbol{\theta}$



Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 10 – Comportamento da raiz η como função de θ (item III da Proposição 2).



Fonte: Elaborado pelos autores.

Conclusões e perspectivas

A principal contribuição deste trabalho foi analisar os efeitos da propaganda em um duopólio de Cournot com produtos diferenciados, utilizando como base funções de demanda lineares adaptadas do modelo teórico proposto por Dixit (1979). O objetivo central foi examinar de que forma a introdução do gasto publicitário por parte das firmas altera as variáveis de equilíbrio – quantidades, preços e lucros – em comparação ao modelo original, sem propaganda.

Ao longo do trabalho, demonstrou-se que o impacto da propaganda não é uniforme nas quantidades, nos preços e nos lucros de equilíbrio, sendo positivo apenas para firmas mais eficientes em mercados com menor diferenciação de produtos. Tais resultados são qualitativamente similares aos da literatura para o caso de duopólio de Cournot com produtos homogêneos. Além disso, também se mostrou que, quanto maior for a eficiência das firmas, ou o preço máximo que os consumidores estão dispostos a pagar pelo produto, o impacto da propaganda será positivo para uma faixa cada vez maior de diferenciação de produtos, abrangendo todos os graus de diferenciação no limite em que a eficiência tende ao infinito.

Diante da atual conjuntura econômica, a relevância deste estudo fica ainda mais evidente. Isso ocorre porque a propaganda, foco central desta análise, está em constante evolução para acompanhar a rápida mudança nos meios de comunicação. Sob o ponto de vista empresarial, é importante entender se o investimento em propaganda persuasiva – compreendida como aquela que destaca atributos que propositalmente tornam o bem mais atraente ao consumidor – pode efetivamente estimular a demanda e, por conseguinte, ampliar os lucros. Dessa maneira, faz sentido investigar quais os impactos da propaganda em mercados oligopolizados, especialmente naqueles em que há diferenciação de produtos.

Com a introdução de propaganda no modelo de Dixit (1979), também foi possível notar que o impacto positivo da propaganda nos lucros das firmas surge apenas em cenários de alta eficiência operacional e em mercados com produtos mais similares entre si (menor diferenciação). É fundamental ressaltar, contudo, a existência de um gap de eficiência: enquanto o impacto positivo sobre preço e quantidades começa a aparecer a partir de um limiar de eficiência $\theta_c = 3\theta_{min}$, para que se verifique um aumento efetivo do lucro, é necessário um nível de eficiência maior que $\left(\frac{27+3\sqrt{41}}{10}\right)\theta_{min} > 3\theta_{min} = \theta_c$.

Uma extensão natural do presente trabalho seria considerar um cenário de competição via preços (duopólio de Bertrand) ou o caso em que uma firma é líder de mercado e a outra é seguidora (duopólio de Stackelberg). Além disso, perspectivas de pesquisa futura também incluem estender o modelo para um oligopólio com n firmas e n produtos diferenciados, além de testar outras abordagens para modelar a diferenciação de produtos.

Apêndice

O objetivo deste apêndice é mostrar que a raiz $\eta \in (0, \beta)$, que existe se $\theta > \left(\frac{27+3\sqrt{41}}{10}\right)\theta_{min}$, $\theta_{min} = \sqrt{2\beta}$, é de fato única[4]. Para tanto, facilita a análise considerar a transformação de variáveis $x = \sqrt{\frac{\delta}{\beta}} \in (0,1)$ e $\lambda = \frac{\theta}{\sqrt{2\beta}} > \frac{27+3\sqrt{41}}{10} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_0$ na equação (47), de forma que $\varphi(\delta)$ pode ser reescrita como:

$$\varphi(\beta x^2) = 2\beta^3 x\, h_\lambda(x), \tag{53}$$

sendo:

$$h_\lambda(x) = 2x^5 - 3\lambda x^4 + (\lambda^2 + 8)x^3 - 12\lambda x^2 + (4\lambda^2 + 8)x - 12\lambda. \tag{54}$$

Desta forma, as raízes de $\varphi(\delta)$ em $(0, \beta)$ correspondem exatamente às raízes de $h_\lambda(x)$ em $(0,1)$.

Como $h_\lambda(0) = -12\lambda < 0$ e $h_\lambda(1) = 5\lambda^2 - 27\lambda + 18 > 0$ para $\lambda > \lambda_0$, o Teorema do Valor Intermediário (Lima, 2009) garante que existe pelo menos uma raiz de h_λ em $(0,1)$. Na sequência, mostra-se que $h'_\lambda > 0$ em $[0,1]$ e assim essa raiz é única.

Inicia-se calculando a derivada de (54) em relação a x:

$$h_\lambda'(x) = 10x^4 - 12\lambda x^3 + 3(\lambda^2 + 8)x^2 - 24\lambda x + (4\lambda^2 + 8). \tag{55}$$

Fixando $x \in [0,1]$ e derivando parcialmente (55) em relação a λ, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} h_\lambda'(x) = 2(3x^2 + 4)\lambda - 12x(x^2 + 2). \tag{56}$$

Observe agora que esta derivada parcial é positiva para:

$$\lambda > \frac{6x(x^2 + 2)}{3x^2 + 4} \stackrel{\text{def}}{=} r(x).$$

Além disso, $r'(x) = \frac{6(3x^4 + 6x^2 + 8)}{(3x^2+4)^2} > 0$ para todo x real. Desta forma, $r(x)$ é estritamente crescente em $[0,1]$ e assim $r(x) \leq r(1) = \frac{18}{7} < \frac{27+3\sqrt{41}}{10} = \lambda_0 < \lambda$ neste intervalo. Isto implica que $\frac{\partial}{\partial\lambda} h_\lambda'(x) > 0$ e consequentemente, para cada $x \in [0,1]$, a função $\lambda \mapsto h_\lambda'(x)$ é crescente em $[\lambda_0, \infty)$, de modo que:

[4] Na demonstração apresentada neste apêndice utilizou-se o auxílio da ferramenta de inteligência artificial generativa ChatGPT, versão 5.4 *Thinking*.

$$h'_\lambda(x) \geq h'_{\lambda_0}(x) \qquad (x \in [0,1],\ \lambda > \lambda_0).$$

Agora considere o polinômio:

$$p(x) \overset{\text{def}}{=} h'_{\lambda_0}(x) = 10x^4 - 12\lambda_0 x^3 + 3({\lambda_0}^2 + 8)x^2 - 24\lambda_0 x + \left(4{\lambda_0}^2 + 8\right). \tag{57}$$

Note que $p(0) = 4\lambda_0^2 + 8 > 0$ e $p(1) = 7\lambda_0^2 - 36\lambda_0 + 42 = \frac{1083+27\sqrt{41}}{50} > 0$. Agora, escreva o polinômio $p(x)$ na base de Bernstein de grau 4 (Farin, 1992; Ralston e Rabinowitz, 1984):

$$p(x) = \sum_{k=0}^{4} b_k \binom{4}{k} x^k (1-x)^{4-k}, \qquad x \in [0,1], \tag{58}$$

onde:

$$\mathrm{b}_0 = 4\lambda_0^2 + 8 = \frac{1298 + 162\sqrt{41}}{25} > 0,$$

$$\mathrm{b}_1 = 4\lambda_0^2 - 6\lambda_0 + 8 = \frac{893 + 117\sqrt{41}}{25} > 0,$$

$$b_2 = \frac{9}{2}\lambda_0^2 - 12\lambda_0 + 12 = \frac{2901 + 369\sqrt{41}}{100} > 0,$$

$$b_3 = \frac{11}{2}\lambda_0^2 - 21\lambda_0 + 20 = \frac{2369 + 261\sqrt{41}}{100} > 0,$$

$$\mathrm{b}_4 = 7\lambda_0^2 - 36\lambda_0 + 42 = \frac{1083 + 27\sqrt{41}}{50} > 0.$$

Como os termos $\binom{4}{k} x^k (1-x)^{4-k}$ são não-negativos em $x \in [0,1]$ e somam a unidade e como os coeficientes $b_0, \ldots, b_4$ são todos positivos, conclui-se que $p(x) > 0$ em $x \in [0,1]$, e, portanto:

$$h'_\lambda(x) \geq h'_{\lambda_0}(x) = p(x) > 0, \text{ para todo } x \in [0,1] \text{ e } \lambda > \lambda_0,$$

e assim h_λ é estritamente crescente em $[0,1]$, o que garante a unicidade da raiz de h_λ em $(0,1)$, e consequentemente, a unicidade da raiz η no interval $(0, \beta)$.

Referências

BAGWELL, K. The Economic Analysis of Advertising. *In:* ARMSTRONG, M.; PORTER, R. H. **Handbook of Industrial Organization**, v. 3, p. 1701-1843, Amsterdam: North-Holland, 2007.

BELLEFLAMME, P.; PEITZ, M. **Industrial Organization – Markets and Strategies.** 1. ed. New York: Cambridge University Press, 2010.

DIXIT, A. A model of duopoly suggesting a theory of entry barriers. **The Bell Journal of Economics**, England, v. 10, n. 1, p. 20-32, 1979. DOI: https://doi.org/10.2307/3003317. Acesso em: 8 de maio de 2026.

DORFMAN, R.; STEINER, P. O. Optimal advertising and optimal quality. **The American Economic Review**, v. 44, n. 5, p. 826-836, 1954.

FARIN, G. **Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design:** A Practical Guide. 3. ed. San Diego: Academic Press, 1992.

FUJISAWA, C. Corporate strategies to exploit the social status created by advertising: quantity vs. price competition. **In:** Biennial Conference of The International Telecommunications Society, 24., 2024, Seoul. New bottles for new wine: digital transformation demands new policies and strategies. Calgary: International Telecommunications Society, 2024. Disponível em: https://hdl.handle.net/10419/302462. Acesso em: 8 de maio de 2026.

JOHNSON, B.; LEE, J. 25 biggest global advertisers include Amazon, L'Oréal, P&G and Alibaba. **Ad Age**, 9 dez. 2024. Disponível em: https://adage.com/article/datacenter/25-biggest-global-advertisers-include-amazon-loreal-pg-and-alibaba/2590216/. Acesso em: 8 de maio de 2026.

KREMER, M. E. J. A. **Impacto da propaganda em modelos de monopólio e duopólio de Cournot**. Trabalho de conclusão de graduação (Graduação em Ciências Econômicas). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2025. Disponível em: http://hdl.handle.net/10183/294718. Acesso em: 26 de março de 2026.

LAUGA, D. O.; OFEK, E.; KATONA, Z. When and How Should Firms Differentiate? Quality and Advertising Decisions in a Duopoly. **Journal of Marketing Research**, v. 59, n. 6, p. 1252-1265, 2022. DOI: https://doi.org/10.1177/00222437221082076. Acesso em: 26 de março de 2026.

LIMA, E. L. **Curso de Análise - Volume 1.** 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

NICHOLSON, W.; SNYDER, C. **Microeconomic Theory:** Basic Principles & Extensions. 12. ed. Boston: Cengage Learning, 2012.

NISA, M.; NAJAH, E. F.; MAULIDA, I. S.; DAMAYANTI, D. D. The effect of personal selling, advertising, and product differentiation on consumer purchase decisions: case study on MS18 Mie Ayam Mantap. **In:** Nicebis: National Innovation Conference on Economics and Business, 2025. Proceedings [...]: NICEBIS, 2025. v. 1, n. 1, p. 1-6. Disponível em: https://proceeding.kreatiftechinnovations.id/nicebis. Acesso em: 8 de maio de 2026.

RALSTON, A.; RABINOWITZ, P. **A First Course in Numerical Analysis.** 2. ed. Singapore: McGraw-Hill, 1984.

SHY, O. **Industrial Organization:** Theory and Applications. Cambridge: The MIT Press, 1995.

SINGH, N.; VIVES, X. Price and quantity competition in a differentiated duopoly. **The RAND Journal of Economics**, v. 15, n. 4, p. 546-554, 1984. Disponível em: https://blog.iese.edu/xvives/files/2011/09/63.pdf. Acesso em: 26 de março de 2026.

YAN, L.; ZHANG, Y.; MEI, S.; ZHONG, W. Personalized pricing with persuasive advertising and the value of consumer information: a duopoly framework. **Electronic Commerce Research**, v. 24, p. 1533-1562, 2024. DOI: https://doi.org/10.1007/s10660-022-09568-2. Acesso em: 8 de maio de 2026.